REACTIVE SYSTEMS GROUP

Universität des Saarlandes

Prof. Bernd Finkbeiner, Ph.D.
Markus Rabe, M.Sc.

Programmierung 1 (SS 2010) - 8. Übungsblatt

http://react.cs.uni-saarland.de/prog1/

Lesen Sie im Buch bis zum Ende von Kapitel 8

Aufgabe 8.1

a) Geben Sie eine reine Menge an, die genau 7 echte Teilmengen hat.

b) Geben Sie die reine Menge an, die das Tupel $\langle 2, 1 \rangle$ darstellt.

c) Sei X eine beliebige Menge, geben Sie eine Obermenge von X an.

Aufgabe 8.2 (Quantifizierung)

Sind folgende Beschreibungen von Mengen äquivalent zu $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$? Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an (also ein Element, welches in nur einer der beiden Mengen vorkommt).

a) $X_1 = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 6 \wedge x \neq 0\}$

b) $X_2 = \{x \in \mathbb{N} \mid (x > 6 \vee x = 0) \Rightarrow \mathit{false}\}$

c) $X_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N} : \lceil x \rceil = n \wedge n \leq 6\}$

Aufgabe 8.3

Untersuchen Sie ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Falls nicht, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

a) $\exists\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, m \in \mathbb{N} : m > n \Rightarrow m \; \mathit{div} \; 1000 > 10$

b) Sei X eine beliebige Menge:

$(\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, Y \subseteq X : |Y| > n) \Leftrightarrow \neg(\exists\, Y \subseteq X\; \forall\, n \in \mathbb{N} : |Y| > n)$

Aufgabe 8.4 (NAND)

Wir führen einen neuen logischen Operator ein: $A \barwedge B$. Dieser sei durch folgende Wahrheitstabelle beschrieben

A	B	$\barwedge$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Leiten Sie die im Buch beschriebenen logischen Operatoren nur mithilfe von $\barwedge$ her. Zum Beispiel lässt sich $\neg A$ als $A \barwedge A$ darstellen.

Aufgabe 8.5

Geben Sie die Elemente der Menge $\mathbb{N}^* \cap \mathbb{B}^2 \cap (\mathbb{B} + \mathbb{B})$ an.

Aufgabe 8.6

a) Gibt es einen stark zusammenhängenden Graphen mit einer Quelle?
b) Gibt es einen stark zusammenhängenden Graphen mit zwei Quellen?

Aufgabe 8.7

Sei die Relation $R = \{(1,2),\ (1,3),\ (2,4),\ (4,1),\ (5,2)\}$ gegeben.

a) Zeichnen Sie die Graphdarstellung von R.

b) Geben Sie die Mengen $DomR$, $RanR$ und $VerR$ an.

c) Ist R funktional? Injektiv? Total auf $\{1,2,4,5\}$? Surjektiv auf $VerR$?

d) Welches Paar müssen Sie entfernen, damit R funktional und injektiv wird?

e) Zeichnen Sie die Umkehrrelation R^{-1}.

f) Zeichnen Sie die Komposition $R \circ R$.

Aufgabe 8.8

Geben Sie die Umkehrfunktion der Funktion $f = \{(2,1),(4,3),(6,5),(8,7)\}$, sowie die Funktion $f \circ (f^{-1} \cup \{(2,1)\})$ an.

Aufgabe 8.9

Zeichnen Sie alle Relationen R mit $VerR = \{1,2\}$,

a) die funktional und injektiv sind;

b) die total und surjektiv auf $VerR$ sind.

Aufgabe 8.10

Betrachten Sie die folgenden Relationen:

- Sei $X \subseteq \mathbb{R}$. Die *natürliche Ordnung* für X ist die Relation

$$NO(X) := \{(x, y) \in X^2 \mid x \leq y\}$$

- Sei X eine Menge. Die *Inklusionsordnung* für $\mathcal{P}(X)$ ist die Relation

$$IO(X) := \{(x, y) \in (\mathcal{P}(X))^2 \mid x \subseteq y\}$$

a) Zeigen Sie, dass sowohl $NO(X)$ als auch $IO(X)$ für beliebige Mengen X tatsächlich Ordnungen sind.

b) Zeigen Sie, dass $NO(X)$ für alle Mengen X linear ist.

c) Für welche Mengen X ist $IO(X)$ linear?

Aufgabe 8.11

Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich der Funktion $\lambda\,(x, y) \in \mathbb{N}^2.\ x^2 - y$ an.

Aufgabe 8.12

Beschreiben Sie mithilfe der Lambda-Notation

a) eine Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nicht injektiv ist,

b) eine injektive Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die surjektiv auf $\mathbb{N}$ ist,

c) eine injektive Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, die nicht surjektiv auf $\mathbb{N}$ ist,

d) die unendliche Folge $0, 2, 4, 6, \ldots$ der geraden natürlichen Zahlen,

e) die unendliche Folge $4, 9, 16, 25, \ldots$ der Quadrate der Zahlen ab 2, und

f) die unendliche Folge $9, 25, 49, 81, \ldots$ der Quadrate der ungeraden natürlichen Zahlen ≥ 3.

Aufgabe 8.13

Seien die Funktionen $f, g \in \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$ wie folgt gegeben:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$
$f(x, y)$	0	0	0	1
$g(x, y)$	0	1	1	1

a) Beschreiben Sie f und g mithilfe der Lambda-Notation.

b) Beschreiben Sie $f[(1, 1) := 0]$ mithilfe der Lambda-Notation.

c) Ist f injektiv? Ist f surjektiv auf $\mathbb{B}$?

d) Geben Sie die Elemente der Menge f an.

e) Geben Sie die Elemente der Menge $f \circ g$ an.

f) Wie viele binäre logische Operatoren gibt es?

Aufgabe 8.14

Geben Sie eine funktionale, injektive und nicht-terminierende Relation R an, so dass $Ver R = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Beschreiben Sie R

a) grafisch,

b) mit Mengen-Notation,

c) mit Lambda-Notation.

Aufgabe 8.15

a) Geben Sie eine unendliche Relation an, die für keinen ihrer Knoten terminiert.

b) Geben Sie eine unendliche, funktionale und terminierende Relation an.

Aufgabe 8.16

Beweisen Sie die Terminierung der folgenden Relationen, indem Sie natürliche Terminierungsfunktionen angeben.

a) $\{((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{N} \times \mathbb{R})^2) \mid x > x' \wedge y < y'\}$

b) $\{((x,y),(x',y')) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^2) \mid x + y > x' + y' \geq -150\}$

Aufgabe 8.17

Geben Sie eine dreielementige Menge wie folgt an:

(i) Jede Konstituente der Menge ist ein Element der Menge.

(ii) Jede nichtleere Konstituente der Menge ist eine einelementige Menge.

Stellen Sie diese Menge als Ausdruck aus geschweiften Klammern und auch als Baum dar. Können Sie auch eine vierelementige Menge mit diesen Eigenschaften angeben?