Axiomatische Beschreibung von Mengen

1. Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Mengen, die wir als die Elemente der Menge bezeichnen.
   $x \in y$: Menge x ist ein **Element** der Menge y
2. Es gibt genau eine Menge, die keine Elemente hat, die **leere Menge** $\emptyset$.
3. Jede endliche oder unendliche Sammlung von Mengen kann als Menge zusammengefasst werden.
4. **Gleichheit**: Zwei Mengen sind genau dann gleich ($x = y$), wenn jedes Element von x ein Element von y ist und jedes Element von y ein Element von x ist.
   $X = Y \Leftrightarrow (\forall x \in X : x \in Y) \wedge (\forall y \in Y : y \in X)$
5. **Wohlfundiertheit:** Es gibt keine unendliche Folge von Mengen, so dass $\ldots \in x_3 \in x_2 \in x_1$ gilt.

Mengendarstellungen

- $\mathrm{B} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $\mathrm{N} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$
- Paar: $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$
- Tupel: $\langle x_1, x_2, \ldots x_n \rangle = \{(1, x_1), \ldots, (n, x_n)\}$
- Listen: $\mathcal{L}(X) = \{\langle\rangle\} \cup (X \times \mathcal{L}(X))$
- Bäume: $\mathcal{T}(X) = X \times \mathcal{L}(\mathcal{T}(X))$
- Summen:
  $+\langle X_1, \ldots, X_n \rangle := \{\langle i, x \rangle \mid i \in \{1, \ldots, n\} \text{ und } x \in X_i\}$

Aussagen

- **Aussage** = Ausdruck, der eine Eigenschaft mathematischer Objekte formuliert
- Boolesche Operatoren

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- Gleichungen:
  $A \Rightarrow B = \neg A \vee B = \neg B \Rightarrow \neg A$
  $\neg(\forall x \in X : A) = (\exists x \in X : \neg A)$

Gerichtete Graphen

- Ein **gerichteter Graph** ist ein Paar (V, E), das aus einer Menge V von Knoten und einer Menge $E \subseteq V \times V$ von Kanten besteht.
- Ein Knoten w heißt **Nachfolger** eines Knotens v, wenn $(v, w) \in E$
- Ein Knoten v heißt **Vorgänger** eines Knotens w, wenn $(v, w) \in E$
- Zwei Knoten v, w heißen **benachbart** oder **adjazent**, wenn $(v, w) \in E$ oder $(w, v) \in E$

Wichtige Begriffe

- **Pfad:** nichtleeres Tupel $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ so dass für alle $i \in \{1, \ldots n-1\}$ gilt: $(v_i, v_{i+1}) \in E$.
- **Länge:** $n-1$, **Ausgangspunkt** v_1, **Endpunkt** v_n
- **einfacher** Pfad: kein Knoten mehrfach
- Ein Pfad $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ heißt **Zyklus**, wenn $n \geq 2, v_1 = v_n$, und $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$ einfach

Wichtige Begriffe

- Ein Knoten w ist von einem Knoten v aus **erreichbar** wenn ein Pfad von v nach w existiert
- Ein Knoten heißt **Wurzel**, wenn von ihm aus alle Knoten erreichbar sind.
- Ein Knoten heißt **Quelle** oder **initial**, wenn er keinen Vorgänger hat.
- Ein Knoten heißt **Senke** oder **terminal**, wenn er keinen Nachfolger hat.
- Ein Knoten heißt **isoliert** wenn er initial und terminal ist.

Wichtige Begriffe

Ein Graph heißt

- **endlich** wenn er nur endlich viele Knoten hat.
- **symmetrisch** wenn er für jede Kante (v, w) auch die Kante (w, v) hat
- **gewurzelt** wenn er eine Wurzel hat
- **zyklisch** wenn er einen Zyklus enthält
- **azyklisch** wenn er keinen Zyklus enthält

Wichtige Begriffe

- Die **Tiefe** eines endlichen Graphen mit mind. einem Knoten ist die maximale Länge seiner einfachen Pfade
- Den **symmetrischen Abschluss** eines Graphen erhält man, indem man für jede Kante (v, w) die inverse Kante (w, v) hinzufügt.
- Ein Graph heißt **stark zusammenhängend** wenn jeder Knoten von jedem Knoten erreichbar ist.
- Ein Graph heißt **zusammenhängend** wenn sein symmetrischer Abschluss stark zusammenhängend ist.
- Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **Teilgraph** eines Graphen $G' = (V', E')$ wenn $V \subseteq V'$ und $E \subseteq E'$
- Der **von v aus erreichbare Teilgraph** von G besteht aus allen Knoten die von v aus erreichbar sind, und aus allen Kanten zwischen diesen Knoten.