Mathematische Prozeduren

- Name + Argumentbereich + Ergebnisbereich
  + definierende Gleichungen

- **Wohlgeformtheitsbedingungen:**
  1. Funktionen werden nur auf Elemente ihres Definitionsbereichs angewendet
  2. Rekursive Anwendungen nur im Argumentbereich
  3. Es werden nur Ergebnisse im Ergebnisbereich geliefert
  4. Die definierenden Gleichungen sind disjunkt und erschöpfend

Rekursion

- **Rekursionsfunktion:** bildet Argument auf Tupel der Folgeargumente ab.
- **Rekursionsbaum:** existiert genau dann wenn die Prozedur für x terminiert.
- **Rekursionsrelationen:**
  - Rekursionsschritt: Paar (x, x') bestehend aus Argument x und Folgeargument x'.
  - Rekursionsrelation: R: Menge aller Rekursionsschritte

Terminierende Relationen

- Eine Relation heißt **fortschreitend**, wenn sie nicht leer ist, und es für jeden Knoten in $x \in Ver R$ eine Kante $(x, y) \in R$ gibt die von x ausgeht.
- Eine Relation heißt **terminierend**, wenn sie keine fortschreitende Relation enthält.
- Eine Relation **terminiert** für ein Objekt x, wenn es keine fortschreitende Relation $R' \subseteq R$ mit $x \in Ver R'$ gibt.

Terminierungsfunktionen

- Eine Funktion $f \in \mathit{Ver}\,R \to \mathbb{N}$ heißt **natürliche Termierungsfunktion** für R wenn für jede Kante $(x, y) \in R$ gilt: $fx > fy$.
- Proposition: Jede Relation für die es eine natürliche Terminierungsfunktion gibt, ist terminierend.
- Eine Funktion f heißt **strukturelle Terminierungsfunktion** für R wenn $\mathit{Dom} f = \mathit{Ver}\,R$ und wenn für jede Kante $(x, y) \in R$ gilt, dass fy eine Konstitutente von fx ist.
- Proposition: Jede Relation, für die es eine strukturelle Terminierungsfunktion gibt, ist terminierend.

Beispielprozeduren

- *abs:* $\mathbb{Z} \to \mathbb{N}$
  $abs\ x = if\ x < 0\ then\ -x\ else\ x$

- *fac:* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $fac\ 0 = 1$
  $fac\ n = n *\ fac(n-1)\ \text{für}\ n > 0$

- *fib:* $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $fib\ n = if\ n < 2\ then\ n\ else\ fib(n-1) + fib(n-2)$