Induktion

Noethersche (auch: wohlfundierte) Induktion

- Für terminierende Relation $>$ auf X (**Induktionsrelation**),

$$(\forall x \in X : (\forall y \in X : x > y \rightarrow py) \Rightarrow px) \Rightarrow \forall x \in X : px$$

- **natürliche Induktion**:
  Induktionsrelation Ter $= \{(x, y) \in \mathbb{N} \mid x > y\}$
- **strukturelle Induktion**:
  Induktionsrelation strukturell (für jede Kante (x, y) ist y eine Konstituente)

Beispiel: natürliche Induktion

$sum : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$sum\ f\ 0 = f\ 0$
$sum\ f\ n = sum\ f(n-1) + f\ n$ für $n > 0$

- **Behauptung** $\forall n \in \mathbb{N} : sum(f, n) = \sum_{i=0}^{n} fi$
- **Beweis** durch **Induktion über** $n \in \mathbb{N}$:
  - Fall $n = 0$: $sum(f, 0) = f\ 0 = \sum_{i=0}^{0} f\ i$
  - Fall $n > 0$: $sum(f, n) = sum(f, n-1) + f\ n =$
    (Induktion für $n-1$**)** $= \sum_{i=0}^{n-1} f\ i + f\ n = \sum_{i=0}^{n} f\ i$

Beispiel: strukturelle Induktion

$$@ : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$$
$$nil@ys = ys$$
$$(x :: xr)@ys = x :: (xr@ys)$$

- **Behauptung:** @ ist assoziativ: Seien $ys, zs \in \mathcal{L}(X)$. Es gilt $\forall xs \in \mathcal{L}(X) : (xs@ys)@zs = xs@(ys@zs)$
- **Beweis** durch **strukturelle Induktion über** $xs \in \mathcal{L}(X)$**:**
  - Fall $xs = nil$: Dann $(xs@ys)@zs = ys@zs = xs@(ys@zs)$
  - Fall $xs = x :: xr$. Dann $(xs@ys)@zs = (x :: (xr@ys))@zs = x :: ((xr@ys)@zs)$ **(Induktion für** xr**):** $= x :: (xr@(ys@zs)) = (x :: xr)@(ys@zs) = xs@(ys@zs)$