O-Funktionen

- **O-Funktionen:** $OF := \{f \in \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : fn \geq 0\}$
- **Dominanz:** $f \leq g :\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \exists c \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : fn \leq c(g(n))$

- Proposition: Für alle $f, g, h \in OF$ gilt:
  1. $f \leq f$ (Reflexivität)
  2. $f \leq g \wedge g \leq h \Rightarrow f \leq h$ (Transitivität)

$\leq$ ist nicht notwendigerweise antisymmetrisch:
$\lambda n \in \mathbb{N}.\ n^3 \leq \lambda n \in \mathbb{N}.\ 33n^3 + 22n^2 + 11 \leq \lambda n \in \mathbb{N}.\ n^3$.

Komplexität einer O-Funktion

- **Komplexität** einer O-Funktion: $O(f) := \{g \in OF \mid g \leq f\}$
- **Ordnung:** Inklusionsordnung

- Proposition:
  1. $O(f\ \ n) = O(c \cdot f\ \ n)$ für alle $c \in \mathbb{R}_+$
  2. $O(f\ \ n) = O(f\ \ n + g\ \ n)$ wenn $O(g) \subseteq O(f)$

- **Komplexitätshierarchie:**
  $O(0) \subset O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \log n)$
  $\subset O(n^a) \overset{a<b}{\subset} O(n^b) \subset O(c^n) \overset{c<d}{\subset} P(d^n)$

Nebenkosten

- *rev*: $\mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$
  $rev(nil) = nil$
  $rev(x :: xr) = (rev\ xr)\ @\ [x]$
- Größenfunktion: $\lambda xs \in \mathcal{L}(X).\ |xs|$
- **Nebenkosten** um Argument der Größe n zu berechnen:
  $g \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}_+$
  $g\ \ n = n + 1$
- **Kostenfunktion:** $r \in \to \mathbb{N}_+$
  $r\ 0 = g\ 0$
  $r\ \ n = r(n-1) + g\ \ n$ für $n > 0$
- Damit: $r\ \ n = g\ 0 + \ldots + g\ \ n$
  $= (0+1) + \ldots (n+1)$
  $= (0 + \ldots + n) + \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{(n+1)\ \text{mal}} = \frac{n}{2}(n+1) + (n+1)$
  $= \frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$

isort

- *isort:* $\mathcal{L}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}(\mathbb{Z})$
  $isort\ nil\ = nil$
  $isort\ (x :: xr)\ = insert(x,\ isort\ xr)$
- *insert:* $\mathbb{Z} \times \mathcal{L}(\mathbb{Z}) \to \mathcal{L}(\mathbb{Z})$
  $insert\ (x, nil)\ = [x]$
  $insert(x :: xr)\ = if\ x \leq y\ \ then\ x :: y :: yr\ \ else\ y :: insert(x, yr)$

- Größenfunktion: $\lambda xs \in \mathcal{L}(\mathbb{Z}).\ |xs|$
- Kostenfunktion: $r\ 0 = g\ 0$
  $r\ \ n = r(n-1) + gn$ für $n > 0$
- $g\ \ n = n + 1$
- $isort \in O(n^2)$
- Laufzeit von *isort* **nicht uniform**:
  - **Worst case:** absteigend sortierte Argumentliste $g = \lambda n.\ n + 1$
  - **Best case:** aufsteigend sortierte Argumentliste
    $g = \lambda n.\ if\ n = 0\ \ then\ 1\ \ else\ 2$
    $r\ \ n = g\ \ 0 + \ldots g\ \ n = 1 + \underbrace{(2 + \ldots + 2)}_{n-\text{mal}} = 2n + 1$

Beispiele

- $@ : \mathcal{L}(X) \times \mathcal{L}(X) \to \mathcal{L}(X)$
  $nil@ys = ys$
  $(x :: xr)@ys = x :: (xr@ys)$

- $ntree : \mathbb{N} \to \mathcal{T}$
  $ntree\ 0 = nil$
  $ntree\ \ n = [ntree(n-1), ntree(n-1)]$

- $exp\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
  $exp(x, 0) = 1$
  $exp(x, n) = exp\ (x^2, n/2)$ für $n \geq 2$ und n gerade
  $exp\ (x, b) = x \cdot\ exp(x^2, (n-1)/2)$ für n ungerade